Københavns Universitet. Økonomisk Institut

2. årsprøve 2015 V-2DM ex ret

Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

Lørdag den 24. januar 2015

Rettevejledning

Opgave 1. Vi betragter fjerdegradspolynomiet $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = z^4 + 4z^3 + 14z^2 + 20z + 25.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 4\frac{d^3x}{dt^3} + 14\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 4\frac{d^3x}{dt^3} + 14\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 25x = 25t^2 + 65t + 98.$$

(1) Vis, at udsagnet

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = \left(z^2 + 2z + 5\right)^2$$

er opfyldt.

Løsning. Ved almindelig udgangning af parenteser finder vi, at

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : \left(z^2 + 2z + 5\right)^2 = z^4 + 4z^3 + 14z^2 + 20z + 25.$$

(2) Bestem samtlige rødder i polynomiet P, og angiv røddernes multipliciteter.

Løsning. Vi finder, at

$$z^2 + 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = -1 \pm 2i,$$

så polynomiet P har rødderne $z_1 = -1 + 2i$ og $z_2 = -1 - 2i$, der begge har multipliciteten 2.

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$ er

$$x = c_1 e^{-t}\cos(2t) + c_2 e^{-t}\sin(2t) + c_3 t e^{-t}\cos(2t) + c_4 t e^{-t}\sin(2t),$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$.

(4) Godtgør, at differentialligningen $(*)$ er globalt asymptotisk stabil.

Løsning. Differentialligningen $(*)$ er globalt asymptotisk stabil, fordi realdelen af alle de karakteristiske rødder er negativ.

(5) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

Løsning. Vi gætter på en løsning $\hat{x} = At^2 + Bt + C$, og vi ser, at $\hat{x}' = 2At + B$ og $\hat{x}'' = 2A$, mens $\hat{x}''' = \hat{x}'''' = 0$.

Ved indsættelse i differentialligningen $(**)$ ser vi, at

$$28A + 40At + 20B + 25At^2 + 25Bt + 25C =$$

$$25At^2 + (40A + 25B)t + (28A + 20B + 25C) =$$
$$25t^2 + 65t + 98, \qquad \forall\, t \in \mathbf{R},$$

så $A = 1, B = 1$ og $C = 2$.

Den fuldstændige løsning til $(**)$ er derfor

$$x = c_1 e^{-t}\cos(2t) + c_2 e^{-t}\sin(2t) + c_3 t e^{-t}\cos(2t) + c_4 t e^{-t}\sin(2t) + t^2 + t + 2,$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$.

(6) En homogen lineær differentialligning $(***)$ har det tilhørende karakteristiske polynomium $Q : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ med forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : Q(z) = \left(z^2 + 2z + 5\right)^3.$$

Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(***)$.

Løsning. De karakteristiske rødder for differentialligningen $(***)$ er åbenbart $z_1 = -1 + 2i$ og $z_2 = -1 - 2i$ (jvf. det ovenstående), der begge har multipliciteten 3.

Den fuldstændige løsning til $(***)$ er derfor

$$x = c_1 e^{-t}\cos(2t) + c_2 e^{-t}\sin(2t) + c_3 t e^{-t}\cos(2t) +$$

$$c_4 t e^{-t}\sin(2t) + c_5 t^2 e^{-t}\cos(2t) + c_6 t^2 e^{-t}\sin(2t),$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 \in \mathbf{R}$.

Opgave 2. Vi betragter korrespondancen $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$F(x) = \begin{cases} [0,1], & \text{for } x < 0 \\ [-3,3], & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ [0,2], & \text{for } x > 1 \end{cases},$$

og den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som er givet ved udtrykket

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^2 + y^2.$$

(1) Vis, at korrespondancen F har afsluttet graf egenskaben.

Løsning. Da grafen for korrespondancen F er en afsluttet delmængde af $\mathbf{R}^2$, har F afsluttet graf egenskaben.

(2) Vis, at korrespondancen F ikke er nedad hemikontinuert.

Løsning. Lad os fx se på punktet $x_0 = 0$. Da er $F(0) = [-3,3]$. Vælg tallet $y_0 = 3 \in F(0)$. Vælg desuden en konvergent følge (x_k), hvor $x_k < 0$ for ethvert $k \in \mathbf{N}$, så $(x_k) \to 0-$. Enhver konvergent følge (y_k), hvor $y_k \in F(x_k) = [0,1]$, kan ikke have grænsepunktet $y_0 = 3$. Altså er F ikke nedad hemikontinuert.

(3) Vis, at korrespondancen F er opad hemikontinuert.

Løsning. For alle $x \in \mathbf{R}$ har man, at $F(x) \subset [-4,4]$, og da $[-4,4]$ er kompakt, og da F har afsluttet graf egenskaben, så er F også opad hemikontinuert.

(4) Bestem mængden af alle fikspunkter for korrespondancen F. [Et fikspunkt for F er et punkt, så $x \in F(x)$.]

Løsning. Mængden af alle fikspunkter for f er intervallet $[0,2]$.

(5) Bestem en forskrift for værdifunktionen $V : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, idet udsagnet

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : V(x) = \max\{f(x,y) \mid y \in F(x)\}$$

er opfyldt.

Løsning. Vi finder, at

$$V(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{for } x < 0 \text{ med } y = 1 \\ 9, & \text{for } x = 0 \text{ med } y = \pm 3 \\ x^2 + 9, & \text{for } 0 < x \leq 1 \text{ med } y = \pm 3 \\ x^2 + 4, & \text{for } x > 1 \text{ med } y = 2 \end{cases}.$$

(6) Bestem en forskrift for maksimumskorrespondancen $M : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : M(x) = \{y \in F(x) \mid V(x) = f(x,y)\}.$$

Løsning. Af det foregående fremgår det, at

$$M(x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{for } x < 0 \\ \{-3, 3\}, & \text{for } x = 0 \\ \{-3, 3\}, & \text{for } 0 < x \leq 1 \\ \{2\}, & \text{for } x > 1 \end{cases}.$$

Opgave 3. Vektorrummet $\mathbf{R}^n$ tænkes forsynet med det sædvanlige indre produkt (prikproduktet). Lad (x_k) og (z_k) være to konvergente følger på $\mathbf{R}^n$ med grænsepunkterne x henholdsvis z.

(1) Lad $a \in \mathbf{R}^n$ være en fast valgt vektor. Vis, at talfølgen $(y_k) = (a \cdot x_k)$ er konvergent med grænseværdien $y = a \cdot x$.

Løsning. Hvis $a = \underline{0}$, er sagen triviel. Hvis $a \neq \underline{0}$, og $\epsilon > 0$ er givet, ser vi, at

$$0 \leq |a \cdot x_k - a \cdot x| = |a \cdot (x_k - x)| \leq \|a\| \|x_k - x\| < \|a\| \epsilon$$

for ethvert $k \in \mathbf{N}$ fra et vist trin k_0. Heraf fremgår påstanden. Bemærk, at vi har benytte Cauchy-Schwarz' ulighed.

(2) Vis, at talfølgen $(v_k) = (x_k \cdot z_k)$ er konvergent med grænseværdien $v = x \cdot z$.

Løsning. Vi finder, at

$$0 \leq |v_k - v| = |x_k \cdot z_k - x \cdot z| = |(x_k - x) \cdot z_k + x \cdot (z_k - z)| \leq$$

$$\|x_k - x\| \|z_k\| + \|x\| \|z - z_k\|.$$

Lad $\epsilon > 0$ være givet. Fra et vist trin, har vi, at

$$\|z - z_k\| < \epsilon, \ \|x - x_k\| < \epsilon \ \text{ og } \ \|z_k\| = \|z_k - z + z\| \leq \epsilon + \|z\|.$$

Heraf fremgår påstanden straks.

(3) Lad (w_k) være en følge på $\mathbf{R}^n$, som opfylder betingelsen

$$\forall\ k \in \mathbf{N} : \|w_k\| > 1.$$

Vis, at følgen (u_k), som er defineret ved forskriften

$$\forall\, k \in \mathbf{N} : u_k = \frac{w_k}{\|w_k\|},$$

har en konvergent delfølge (u_{k_p}).

Løsning. Følgen (u_k) er en følge af vektorer på enhedssfæren

$$S(\underline{0}, 1) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\},$$

som er en kompakt mængde. Heraf følger påstanden straks.

Opgave 4. Vi betragter integralet

$$I(x) = \int_0^1 \left(2x + e^t \dot{x}^2\right) dt = \int_0^1 \left(2x + e^t \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) dt$$

og den funktion $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, som har forskriften

$$\forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : F(x, y) = 2x + e^t y^2.$$

(1) Vis, at funktionen F er konveks overalt på definitionsmængden $\mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2 \text{ og } \frac{\partial F}{\partial y} = 2e^t y.$$

Da følger det, at F har Hessematricen

$$F'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2e^t \end{pmatrix}.$$

Heraf ser vi, at matricen F'' er positiv semidefinit, så funktionen F er åbenbart konveks.

(2) Bestem den funktion $x^* = x^*(t)$, der minimerer integralet $I(x)$, idet betingelserne $x^*(0) = 0$ og $x^*(1) = 3e^{-1}$ er opfyldt.

Det er klart, at det givne variationsproblem er et minimeringsproblem. Eulers differentialligning er

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2e^t\dot{x} - 2e^t\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \dot{x} = e^{-t}.$$

Den tilhørende homogene differentialligning $\ddot{x} + \dot{x} = 0$, har den fuldstændige løsning $x = c_1e^{-t} + c_2$, hvor $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

En løsning til den givne inhomogene differentialligning må have formen $\hat{x} = Ate^{-t}$, og vi får så, at

$$\hat{x}' = Ae^{-t} - Ate^{-t} \text{ og } \hat{x}'' = -2Ae^{-t} + Ate^{-t}.$$

Vi finder herefter, at $A = -1$, så den fuldstændige løsning til Eulers differentialligning er

$$x = c_1e^{-t} + c_2 - te^{-t},$$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

Ud fra de givne randværdibetingelser finder vi, at $c_1 + c_2 = 0$ og $c_1e^{-1} + c_2 - e^{-1} = 3e^{-1}$. Da får vi, at $c_1 = \frac{4}{1-e}$ og $c_2 = \frac{4}{e-1}$.

Den søgte løsning er derfor

$$x^* = \frac{4}{1-e}e^{-t} + \frac{4}{e-1} - te^{-t}.$$